**용수철/흔들이의 운동**

복원력과 단조화운동

2018-12967 컴퓨터공학부 박재문

1. **서론**

**1.1. 실험 목적**

평형상태의 모든 계는 작은 변화에 대해 원래의 상태로 돌아가려는 성질을 가지고 있고, 이는 역학계에서 복원력으로 나타난다. 역학계에서는 현재의 운동 상태를 유지하려 하는 관성도 가지고 있는데, 복원력과 관성에 의해 역학계에서 물체는 단조화 운동을 하게 된다. 이러한 운동을 하는 것의 대표적인 예로 용수철에 매달린 물체와 실에 매달려 있는 진자가 있는데, 이번 실험에서는 용수철에 달린 물체의 단조화 운동과 실에 매달려 중력에 의해 왕복운동을 하는 진자의 단조화 운동을 직접 조사해본다. 또한 계에서 변화의 정도가 클 경우 물체는 더 이상 단조화 운동을 유지하지 못하는데, 이도 이번 실험에서 조사해 본다.

**1.2. 배경 지식**

1.2.1. 복원력과 용수철 운동

복원력은 평형상태의 계에서 외력에 의해 평형상태가 깨졌을 때 기존의 평형상태로 되돌아가려는 힘을 말하고, 이러한 특성을 보이는 운동 중 대표적인 것이 용수철의 진동 운동이다. 정지해 있는 용수철은 물리적 평형상태에 놓여 있는데, 이를 늘리거나 줄일 경우 변화한 길이에 비례하는 복원력이 생기고, 이는

로 나타난다. 이 때 x는 용수철의 길이 변화량이고, k는 용수철 상수로, 각 용수철마다 가지는 고유한 상수이다. kx 앞의 -는 변화한 방향의 반대 방향으로 작용하는 복원력의 특성을 나타낸다. 여기에 중력이 함께 작용하는 경우 질량이 m인 물체의 알짜힘은 다음과 같다.

여기서 일 때 물체는 역학적 평형상태에 놓인다. Mg의 크기는 항상 일정한 크기로 작용하므로 평형상태에서부터 실제로 변화하는 힘의 크기는 F=-kx이다. 또한, 등속 원운동을 하는 물체를 운동 경로의 원을 지나는 평면과 수직인 평면에 정사영시킬 경우, 정사영된 물체의 그림자는 단조화 운동을 하고, 원운동의 반지름을 r, 각속도를 ω, 시간을 t라 할 때, 물체의 가속도의 크기는

이다. 이를 통해 용수철의 단진동에서, 진동의 진폭을 라 할 때 이고, 용수철의 단조화 운동의 각속도와 주기는 각각

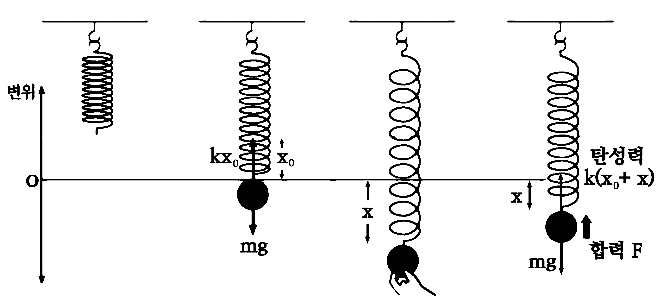
임을 알 수 있다.

(나)

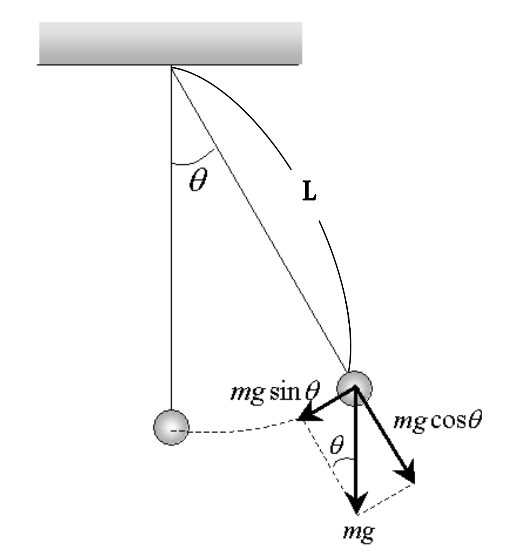
(다)

(라)

(가)

용수철의 운동을 그림으로 나타낸 것. (가)는 평형상태, (나)는 물체가 달린 채 평형을 이룬 상태, (다)는 외력을 가한 상태, (라)는 단조화 진동을 하는 상태를 나타낸다.

1.2.2. 단진자(흔들이)의 운동

길이가 L인 실에 매달린 질량이 m인 추의 복원력은 이고, 방향은 궤도의 접선 중 진동 중심을 향하는 방향이다. 이 때 *θ*가 충분히 작다면, 용수철의 단조화 운동의 각속도와 주기를 구한 방법을 단진자의 운동에 대해 그대로 적용하면

에서

임을 알 수 있다.

**2. 본론**

**2.1. 실험 방법**

이번 실험의 주 목적은 계의 변화가 작은 경우의 용수철과 진자의 단조화 운동을 관찰하고 이를 이론적인 결론과 비교해보며, 계의 변화가 큰 경우 단조화 운동이 유지되지 않는지를 조사하여 본다. 실험하기에 앞서 실험에 필요한 기본적인 정보(사용할 추들의 무게, 진자 운동에 사용할 실의 길이, 용수철의 기본 길이)를 측정하고, 용수철 실험의 경우 여러 무게의 추를 사용하여 용수철의 늘어난 길이를 측정해 용수철 상수 k를 측정한다. 이후 용수철과 진자의 운동을 촬영하여 두 운동의 주기를 측정하고, 결과를 이론적인 계산 결과와 비교한다. 다양한 무게의 추로 같은 실험을 반복한다. 이 때 용수철과 진자의 진동의 세기가 너무 크지 않도록 유의한다. 마지막으로 용수철과 진자의 변형의 크기를 크게 하였을 때의 각각의 주기를 측정하여, 단조화 운동을 하지 않는지 관찰한다.

**2.2. 실험 결과**

2.2.1. 용수철의 단조화 운동

용수철의 용수철 상수를 계산할 때에 용수철이 외력이 없을 때에도 복원력에 의한 힘을 받고 있음을 실험을 통해 알게 되었다. 따라서 외력이 없을 때의 용수철의 길이와 추를 달았을 때의 길이를 비교하는 것이 아니라, 추가 가장 가벼울 때 용수철의 길이와 그에 무게를 추가해서 실험했을 때 용수철의 길이를 비교하여 용수철 상수를 측정하였고, 그 값은 5.0 N/m로 측정되었다. 이를 통해 용수철의 이론적인 진동 주기를 계산할 수 있다. 실험에 사용한 추의 무게는 3가지로, 각각 86g, 116g, 136g이었고, 이를 통해 계산한 용수철 진자의 이론적 주기를 소수점 둘째자리까지 반올림한 값은 각각 0.83s, 0.96s, 1.04s이었다. 실험은 각 무게마다 3번씩 진행하였고, 각각 최고점/최저점에 위치할 때의 시간을 모아 차이를 구해 주기값을 한 실험당 여러 개씩 구해 평균을 내어, 세 평균값을 다시 평균내어 최종 실험값을 소수점 아래 둘째 자리까지 반올림해 도출하였다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 86g 추 | 1차 | 2차 | 3차 |
| 주기값(s) | 0.85 | 0.8 | 0.834 |
| 0.85 | 0.817 | 0.85 |
| 0.833 | 0.816 | 0.85 |
| AVR(s) | **0.83** | **THR(s)** | **0.82** |

- 86g 추를 이용한 용수철 주기 측정실험. AVR(s)는 실험값의 평균을, THR(s)는 이론값을 초 단위로 나타낸 것이다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 116g 추 | 1차 | 2차 | 3차 |
| 주기값(s) | 0.967 | 0.967 | 0.967 |
| 1 | 0.967 | 0.983 |
| 0.967 | 0.983 | 0.966 |
| AVR(s) | **0.97** | **THR(s)** | **0.96** |

- 116g 추를 이용한 용수철 주기 측정실험.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 136g 추 | 1차 | 2차 | 3차 |
| 주기값(s) | 1.067 | 1.05 | 1.066 |
| 1.05 | 1.05 | 1.017 |
| AVR(s) | **1.05** | **THR(s)** | **1.04** |

- 136g 추를 이용한 용수철 주기 측정실험.

세 실험의 결과 모두 결과의 평균값이 이론값보다 0.01초 크게 나타나지만, 이는 아주 큰 오차는 아니므로 물체가 대략적으로 단조화 운동을 하고 있음을 알 수 있다. 다음으로 진자의 단조화 운동 실험을 한다.

2.2.2. 진자의 단조화 운동

진자 운동의 경우 실의 길이는 59.5cm(이론적인 실험의 경우 실의 진동 중심부터 진자의 무게중심을 기준으로 실의 길이를 재야 하지만, 추의 정확한 무게중심을 재기 어려우므로 대략적인 무게중심을 예측하여 길이를 선정하였다)로, 중력 가속도는 9.8 m/로 이론적인 진자의 진동 주기를 계산하였고, 값은 추의 무게와 무관하게 1.55초였다. 진자 실험은 각 추의 무게가 86g, 116g, 136g가 되도록 하여, 각 무게별로 진자가 3-4번 진동하는 것을 측정하여 x축의 값이 최대값/최소값을 가지는 순간 사이의 간격을 한 주기로 간주하여 진자의 주기를 측정하였다. 진자가 양 쪽 끝에 위치할 경우 y축의 값은 가장 큰 값을 가지고 x축의 값은 가장 크거나 작은 값을 가지므로 두 값 중 하나만 사용해서 주기를 계산할 수 있는데, x축의 변화량이 더 크므로 자료를 알아보기 쉬워 x축을 기준으로 주기를 계산한다

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 86g | 116g | 136g | AVR(s) |
| 1.54175 | 1.55 | 1.5585 | **1.55** |

- 세 가지 무게의 진자를 이용한 주기 측정실험.

세 가지 무게로 측정한 진자의 주기를 평균내어 소수점 아래 둘째 자리까지 반올림하여 도출한 값인 AVR는 1.55 초였고, 이는 이론적인 주기를 소수점 아래 둘째 자리까지 반올림한 값과 일치한다. 또한 무게 별 주기의 값은 측정의 오차가 다소 있지만 무게에 상관없이 일정한 편이다.

2.2.3. 계의 변화가 큰 경우

용수철의 경우 변화의 정도를 크게 할 경우 용수철이 최소길이 이상까지 줄어들어야 하는데 이는 불가능하고, 최소길이 이상까지 줄어들지 않을 정도로 진동을 줄 경우 별다른 오차가 나타나지 않았다. 이는 위 실험에서 같은 실험을 여러 번 반복할 때, 진폭의 크기가 서로 상당히 차이가 났음에도 측정된 주기는 눈에 띄는 차이를 보이지 않았다.

- 136g짜리의 추로 용수철의 진동의 주기를 측정한 세 번의 실험의 시간에 따른 y축 좌표값. 파란색과 주황색의 경우 진폭이 약 두 배 가량 차이가 나지만 두 진동의 주기는 차이가 거의 없다.

위 그래프로부터 계의 변화량이 어느 정도 차이가 있더라도 그 정도가 아주 큰 차이가 아니라면 물체는 단조화 운동에 근사한 운동을 함을 확인할 수 있다. 따라서 계의 변화를 극대화하기 위해 진자 운동의 초기 각도를 굉장히 크게(90도에 근접) 하여 주기 측정 실험을 다시 해 보았다.

- 136g 추를 각도를 달리하여 한 주기 측정실험. 비교의 편의를 위해 그래프의 시작 형태를 통일하였다. 파란색이 작은 각도, 주황색의 큰 각도로 운동하는 진자의 x축 좌표값이다.

위 그래프를 통해 각도의 크기를 달리한 두 진자의 운동을 보았을 때, 여전히 두 주기는 비슷하지만 시간이 지날수록 큰 각도로 운동하는 진자의 주기가 미세하게 늦어짐을 확인할 수 있다. 이 주기를 구한 결과 약 1.59초로, 앞서 한 실험들보다 약 2.6%가량 주기가 느려졌다. 여전히 큰 차이는 아니나 계에서 변화의 정도가 큰 경우 단조화 운동에 영향을 미친다는 사실을 짐작할 수 있다.

**2.3. 오차 원인 분석**

이번 실험의 경우 전반적으로 오차의 값이 크지 않았지만, 마지막 실험의 경우 사실 저 데이터로 초기 각도가 큰 단진자가 단조화 운동을 따르지 않는다는 사실을 단정할 수는 없다. 앞의 두 실험에서도 각 실험한 값들의 평균을 구한 값은 이론적인 값과 유사하나, 각 실험의 값 자체들은 서로 크게는 5% 이상도 차이가 나기 때문이다. 따라서 한 번의 실험에서 3개의 표본의 평균을 구한 값으로 도출한 결과의 2.6%가량의 차이는 측정에서 나타나는 오차로도 충분히 나타날 수 있는 값이다. 이를 더 정확하게 알아보려면 실험을 어떻게 진행해야 할까?

1. 측정 시간의 세분화

이번 실험에서 주기를 구하는 데에 쓰인 방법인 진동의 끝 지점에 도달하는 순간 사이의 시간 간격을 측정하는 방법은 추가 정확하게 진동의 끝에 있는 순간을 카메라가 포착할수록 값이 정확하다. 만약 정확하게 진동의 끝 지점에 있을 때 물체가 찍혔다면 그 프레임의 앞뒤 프레임의 좌표 정보는 대칭성에 의해 서로 같아야 하는데, 이가 일치하지 않는 경우가 많았다. 카메라의 측정 간격은 0.033초로, 자료상에서 끝의 점을 찾더라도 해당 프레임과 앞뒤 프레임을 촬영하기까지 걸린 0.066초 사이 어디에 진정한 끝 점이 존재하는지는 정확히 알 길이 없고, 이가 심한 경우 주기의 오차는 0.1초가 넘을 수도 있다(다행히 이번 실험에서 그렇게 큰 오차는 나타나지 않았다). 더 높은 프레임수의 카메라를 사용한다면 이 문제는 해결할 수 있다.

2. 완벽한 상황 구성

-이상적 실험이라면 없어야 할 용수철 진동에서 추의 x축 좌표 변화량. 0.1cm단위로 작은 값이지만 엄연히 존재한다.

용수철 안에서, 실과 지지대 사이에서의 마찰력처럼 실험에서 어쩔 수 없는 요인들도 존재한다. 하지만 위 그래프에서 나타난 추의 x축 좌표 변화량은 사람이 손으로 실험을 진행하면서 생긴 불필요한 요인으로, 이가 실험 결과에 어떠한 영향을 줄 지 알 수 없다. 장치를 이용하여 x축 진동을 없앤다면 오차의 가능성을 줄일 수 있다. 또한 이번 실험의 경우 용수철의 질량은 고려하지 않은 채 이론값을 계산했다. 예를 들어 만약 용수철의 질량을 대략적으로 반영한 주기 식인

을 이용한다면, 용수철의 질량이 10g이라 가정할 경우 86g 추를 이용한 용수철의 주기는 0.82초가 아닌 0.84초가 된다. 이러한 차이는 실험값이 왜 이론값보다 조금씩 주기가 길게 나왔는지를 설명할 수 있다. 실제 상황에 더 잘 들어맞는 식을 사용한다면 더 정확한 실험이 가능해 질 것이다.

3. 실험 횟수 증가

마지막 실험의 경우 실험 횟수가 지나치게 부족하였다. 실험을 한 횟수가 많을수록 데이터가 많아지고, 데이터가 많아질수록 정확한 결과를 얻게 된다. 마지막 실험을 여러 번 반복하였을 때에도 2.5~3% 가량의 차이를 지속적으로 확인한다면, 계의 변화가 크면 단조화 운동이 유지되지 않는다는 설명이 설득력을 얻을 수 있다.

**3. 결론**

이번 실험에서는 용수철과 실을 이용해서 단조화 운동이 일어나는지 관찰해 보았고, 각자 물체의 질량이 단조화 운동의 주기에 어떠한 영향을 주는지 조사해 보았다. 예상했던 것과 같이 용수철을 이용한 단조화 운동의 경우 추의 질량이 클수록 진동의 주기가 길어졌고, 실을 이용한 진자의 단조화 운동의 경우 추의 질량과 무관하게 주기가 거의 일정하였다. 또한 진자의 단조화 운동에서 진자의 진동 각도를 크게 하였을 때 각도가 작을 때보다 주기가 미세하게 길어지는 것을 통해 계의 변화가 클 때 단조화 운동이 유지되지 않는다는 것을 확인해 보았다. 조금씩 나타난 오차의 원인으로는 촬영 프레임수의 저조함, 실제 상황과는 정확하게 맞아 떨어지지 않는 계산식, 실험 횟수 부족 등을 꼽았다. 결론적으로 이론적으로 배우는 단조화 운동이 실제 상황에서도 거의 그대로 적용됨을 알아볼 수 있었다.

\*참고 자료

-서울대 물리학실험 매뉴얼 - 용수철흔들이의 운동

-위키 백과 – 복원력(<https://ko.wikipedia.org/wiki/%EB%B3%B5%EC%9B%90%EB%A0%A5> )

-위키 백과 – 조화 진동자

(<https://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%A1%B0%ED%99%94_%EC%A7%84%EB%8F%99%EC%9E%90> )

\*조교님 한학기동안 수고 많으셨습니다. 감사합니다